

Ziegenproblem (Monty Hall Problem)

Proseminar Schlüsselprobleme der Informatik



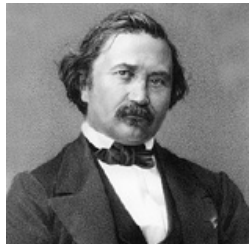
Das Ziegenproblem (Monty Hall Problem)

*Universität Potsdam
Institut für Informatik*

Ziegenproblem - Gliederung

- 1. Einführung**
 - Entstehung
 - Problembeschreibung
- 2. Mögliche Strategien**
 - „Nicht-Wechsel“-Strategie
 - „Immer-Wechsel“-Strategie
 - Gewinnwahrscheinlichkeit
- 3. Erklärungsansätze**
 - Entscheidungsbaum
 - Bayes'sches Theorem
 - Implementierung
- 4. Analyse**
 - Fundamentale Ideen
 - Gegenstandsanalyse
 - Schlüsselproblem
- 5. Ähnliche Probleme**
 - Das verallgemeinerte Ziegenproblem
 - Heirats- / Sekretärinnenproblem
- 6. Quellen**

Ziegenproblem - Einführung - Entstehung



© <http://www.academie-francaise.fr>

1889 stellte der französische Mathematiker Joseph Bertrand in seinem Werk „Calcul des probabilités“ ein äquivalentes Problem vor: „Drei-Kasten-Problem“



© <http://www.letsmakeadeal.com>

1983 moderierte Monty Hall auf NBC Television Network die amerikanische Spielshow „Let's Make a Deal“



© <http://www.letsmakeadeal.com>



© home.att.net

1990 stellte die amerikanische Autorin Marilyn vos Savant das Ziegenproblem in ihrer Kolumne „Ask Marilyn“ (Zeitschrift „Parade Magazin“) vor



© <http://www.letsmakeadeal.com>

Ziegenproblem - Einführung - Problembeschreibung

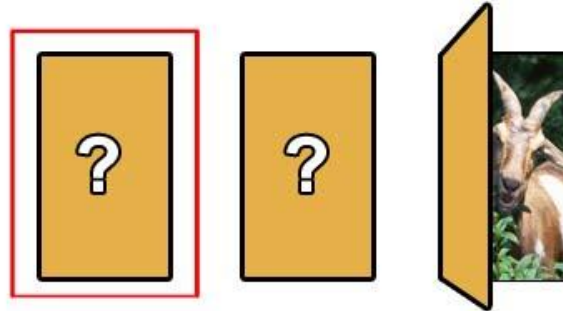
Aufbau:

- 3 Tore, hinter denen
- 2 Ziegen und
- 1 Auto versteckt sind.



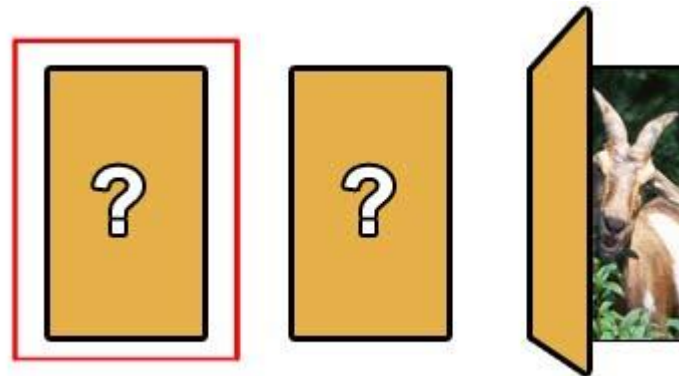
- Die Tore sind zunächst verschlossen.

Ziegenproblem - Einführung - Problembeschreibung



1. Der Kandidat wählt ein Tor aus, welches aber vorerst verschlossen bleibt.
2. Daraufhin öffnet der Moderator, der die Position des Gewinns kennt, eines der beiden anderen Tore, hinter dem sich eine Ziege befindet. Im Spiel befinden sich also noch ein Gewinn und eine Niete.
3. Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere Tor zu wählen.

**Wie soll sich der Kandidat
entscheiden,
um seine Gewinnchance zu
maximieren?**



Simulation 1

Ziegenproblem - Einführung - Problembeschreibung

- „Die Antwort, wonach die Mitspielerin die Tür wechseln solle, wurde in den Sitzungssälen der CIA und in den Baracken der Golfkrieg-Piloten debattiert. Sie wurde von Mathematikern am Massachusetts Institute of Technology und von Programmierern am Los Alamos National Laboratory in New Mexico untersucht und in über tausend Schulklassen des Landes analysiert.“

New York Times 21.7.1991

Ziegenproblem - Einführung - Problembeschreibung

- „Etwa 99 Prozent sind der Meinung, dass das Auto ebenso gut hinter der einen wie der anderen Tür stehen kann,“
- „fast 90 Prozent entscheiden sich angesichts dieser vermeintlichen Sachlage dafür, bei der ursprünglichen Tür zu bleiben“

DIE ZEIT 18.11.2004 Nr.48 „Das Rätsel der drei Türen“

Ziegenproblem - Mögliche Strategien

Wozu eine Strategie?

- Angenommen wir können das Spiel öfter spielen und wollen möglichst oft gewinnen.

Gesetz der großen Zahl

(„Das Ziegenproblem“ – Gero von Randow)

„Je größer die Stichprobe, desto genauer entspricht die Verteilung der Werte in der Stichprobe der Verteilung in der Gesamtpopulation.“

Ziegenproblem - Mögliche Strategien

Simulation:

- Nachbildung/Imitation von Vorgängen und Abläufen durch geeignete Versuche (z.B. durch Computerprogramme)
- Dadurch sind "(Hoch-)Rechnungen" in einem abstrakten Modell eines Systems möglich, die auf das Beispiel in der Praxis übertragen werden können
- Mit Hilfe von Computerprogrammen können vor allem leicht viele Versuche durchgeführt werden, sodass das Gesetz der großen Zahl erfüllt wird.

Ziegenproblem - Mögliche Strategien

„Nicht-Wechsel“-Strategie

<p>Ziege Ziege Auto</p>  <p>Kandidat</p>	<p>Der Kandidat wählt Tor 1, die Ziege hinter Tor 2 wird ihm gezeigt, ohne Wechsel verliert er.</p>
<p>Ziege Ziege Auto</p>  <p>Kandidat</p>	<p>Der Kandidat wählt Tor 2, die Ziege hinter 1 wird ihm gezeigt, ohne Wechsel verliert er.</p>
<p>Ziege Ziege Auto</p>  <p>Kandidat</p>	<p>Der Kandidat wählt Tor 3, eine Ziege (hinter Tor 1 oder 2) wird ihm gezeigt, ohne Wechsel gewinnt er.</p>


Ziegenproblem - Mögliche Strategien

Bei der „**Nicht-Wechsel**“-Strategie

- verliert man in $\frac{2}{3}$ der Fällen
- gewinnt man in $\frac{1}{3}$ der Fälle
(nur dann, wenn man gleich am Anfang das Auto gewählt hat)

Ziegenproblem - Mögliche Strategien

„Immer-Wechsel“-Strategie

<p>Ziege Ziege Auto</p>  <p>Kandidat</p>	<p>Der Kandidat wählt Tor 1, die Ziege hinter Tor 2 wird ihm gezeigt, durch einen Wechsel (von 1 auf 3) gewinnt er.</p>
<p>Ziege Ziege Auto</p>  <p>Kandidat</p>	<p>Der Kandidat wählt Tor 2, die Ziege hinter Tor 1 wird ihm gezeigt, durch einen Wechsel (von 2 auf 3) gewinnt er.</p>
<p>Ziege Ziege Auto</p>  <p>Kandidat</p>	<p>Der Kandidat wählt Tor 3, eine Ziege (1 oder 2) wird ihm gezeigt, durch einen Wechsel (von 3 auf 2 bzw. 1) verliert er.</p>

Ziegenproblem - Mögliche Strategien

Bei der „Immer-Wechsel“-Strategie

- verliert man in $\frac{1}{3}$ der Fällen
(nur dann, wenn man gleich am Anfang das Auto gewählt hat)
- gewinnt man in $\frac{2}{3}$ der Fälle

Ziegenproblem - Mögliche Strategien

Wahrscheinlichkeit:

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses A ist:

$$p(A) = \frac{\text{\# günstige Ereignisse}}{\text{\# mögliche Ereignisse}}$$

wobei

p: Wahrscheinlichkeit

A: Ereignis

und $0 \leq p(A) \leq 1$

Gewinnwahrscheinlichkeit

$$p(\text{Auto}) = \left\{ \begin{array}{l} 1/3 \text{ „Nicht-Wechsel“-Strategie} \\ 2/3 \text{ „Immer-Wechsel“-Strategie} \end{array} \right.$$

Ziegenproblem - Mögliche Strategien

Kann mit einer anderen Strategie eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit als $2/3$ erzielt werden?

Angenommen, die Wahl wird mit einer Wahrscheinlichkeit w geändert.

Gewinnwahrscheinlichkeit:

$$\frac{(w+1)}{3}$$

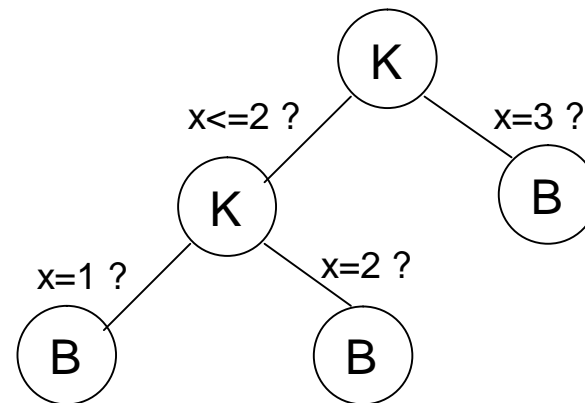
Da für die Wahrscheinlichkeit w gilt: $0 \leq w \leq 1$,

ist die Gewinnwahrscheinlichkeit für $w=1$ am Größten.

Ziegenproblem - Erklärungsansätze - Entscheidungsbaum


Entscheidungsbaum (Duden Informatik):

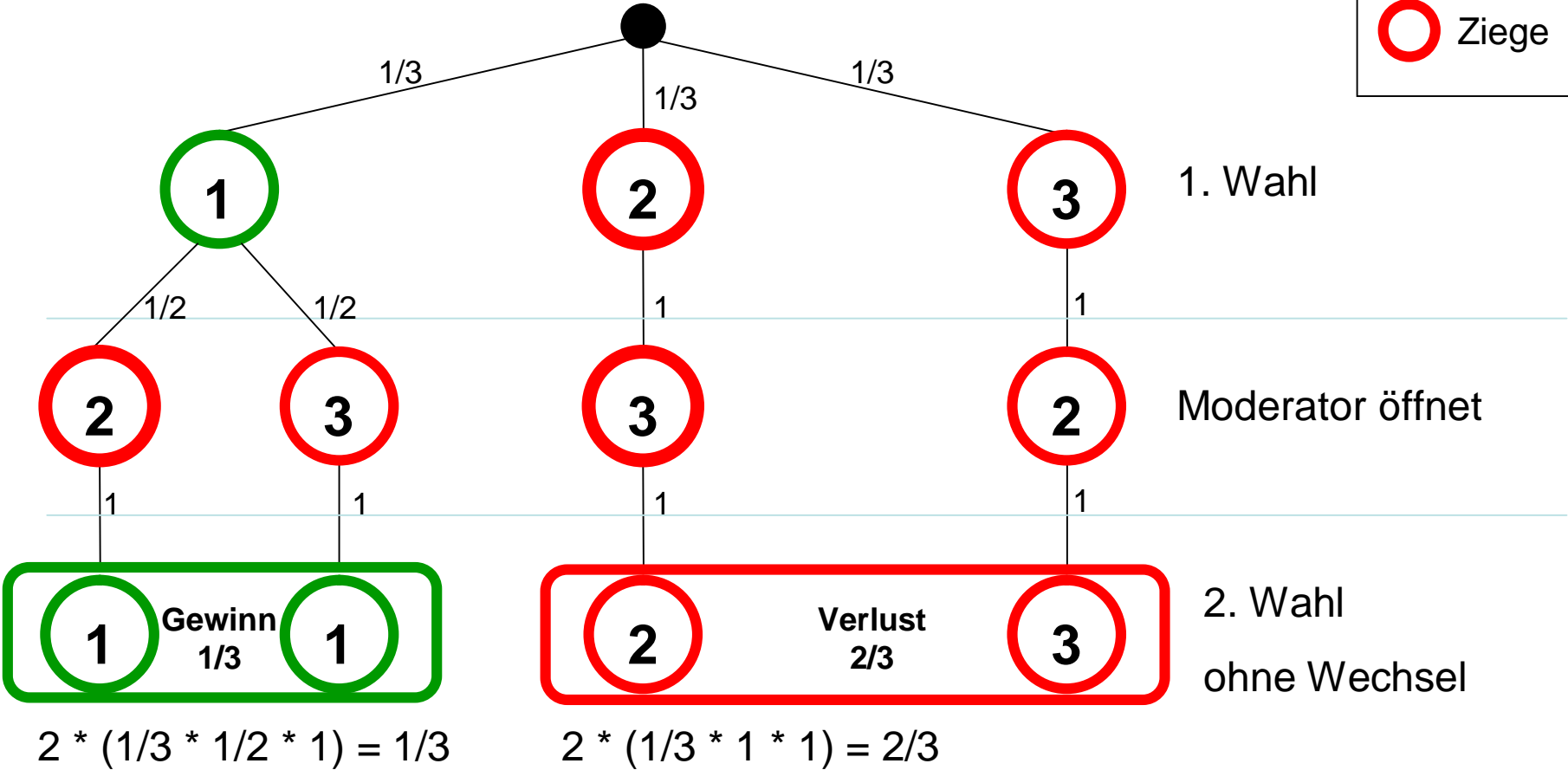
„Methode zur grafischen Darstellung und Bearbeitung von Entscheidungsproblemen [..]. Ein Entscheidungsbaum zu einem Entscheidungsproblem ist ein geordneter, gerichteter Baum. Jeder Knoten des Baumes mit Ausnahme der Blätter enthält seinerseits ein Entscheidungsproblem, das Teil des Gesamtproblems ist. [..] Die Blätter enthalten die Ergebnisse der jeweiligen Entscheidungsfolgen. [..]“



Ziegenproblem - Erklärungsansätze - Entscheidungsbaum

„Nicht-Wechsel-Strategie“

Legende:
 Auto
 Ziege

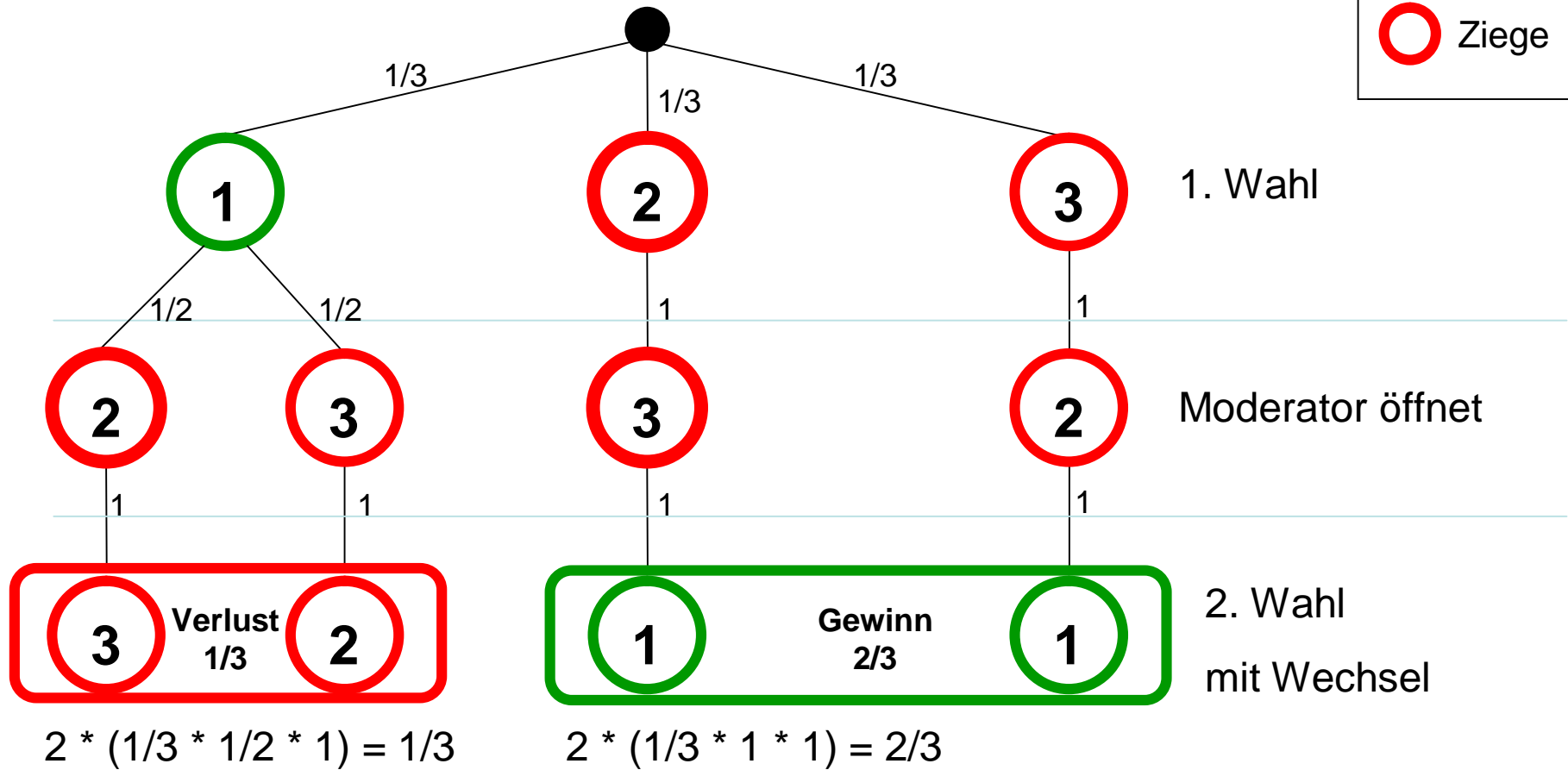


Ziegenproblem - Erklärungsansätze - Entscheidungsbaum

„Immer-Wechsel-Strategie“

Legende:

- Auto
- Ziege



Ziegenproblem - Erklärungsansätze – Bayes'sches Theorem

Bedingte Wahrscheinlichkeit (Wikipedia):

„Bedingte Wahrscheinlichkeit [...] ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass ein Ereignis B bereits vorher eingetreten ist. Es wird geschrieben als $p(A | B)$, ...“
 $p(\text{Ereignis} | \text{Ursache})$

Bayes'sches Theorem (Wikipedia):

Es gibt an, wie man mit bedingten Wahrscheinlichkeiten rechnet.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^N P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$



© <http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Thomasbayes.jpg>

Ziegenproblem - Erklärungsansätze – Bayes'sches Theorem

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^N P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

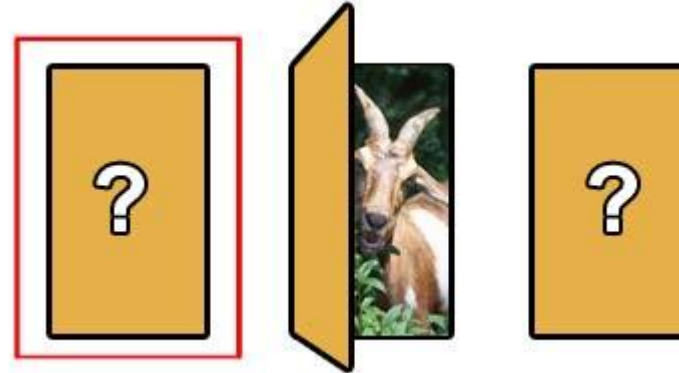
- $p(A_i | B)$: „Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A_i , wenn B bereits eingetreten ist“
- $p(B)$: **totale Wahrscheinlichkeit** beschreibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Ereignis B aus einer Menge von Ereignissen A_1 bis A_n folgt
- $p(B)$ für $N=3$ (3 Tore)
 $p(B) = p(A_1) * p(B | A_1) + p(A_2) * p(B | A_2) + p(A_3) * p(B | A_3)$

$$p(A_i | B) = \frac{p(A_i) * p(B | A_i)}{p(A_1) * (p(B | A_1) + p(A_2) * p(B | A_2) + p(A_3) * p(B | A_3))}$$

Ziegenproblem - Erklärungsansätze – Bayes'sches Theorem

Bezeichne:

- Tore: L_1, L_2, L_3
- Auto hinter dem Tor L_i : A_i mit $i=\{1,2,3\}$



o.B.d.A:

- Teilnehmer wählt Tor L_1 , Moderator öffnet L_2
- Folglich befindet sich der Sportwagen entweder hinter Tor L_1 oder L_3 , d.h. es gilt A_1 oder A_3
- B Ereignis, dass der Moderator Tor L_2 geöffnet hat

$$p(A_3 | B) = \frac{p(A_3) * p(B | A_3)}{p(A_1) * (p(B | A_1) + p(A_2) * p(B | A_2) + p(A_3) * p(B | A_3))}$$

Ziegenproblem - Erklärungsansätze – Bayes'sches Theorem

$$p(A_3 | B) = \frac{p(A_3) * p(B | A_3)}{p(A_1) * (p(B | A_1) + p(A_2) * p(B | A_2) + p(A_3) * p(B | A_3))}$$

- $p(B | A_3) = 1$, wenn der Sportwagen hinter Tor 3 steht und der Moderator somit Tor 2 öffnen müsste
- $p(B | A_1) = \frac{1}{2}$, wenn das Auto hinter Tor 1 steht und der Moderator somit nur die Tore 2 und 3 öffnen könnte
- $p(B | A_2) = 0$, denn wenn der Moderator ein Ziegentor öffnet, dann kann dahinter kein Auto sein

$$\begin{aligned} p(A_3 | B) &= (1/3 * 1) : (1/3 * \frac{1}{2} + 1/3 * 0 + 1/3 * 1) \\ &= (1/3) : (1/6 + 1/3) \\ &= (1/3) : (1/2) \\ &= 2/3 \end{aligned}$$

$$p(A_1|B) = 1 - p(A_3 | B) = 1 - 2/3 = 1/3$$



Ziegenproblem - Erklärungsansätze - Implementierung

Anforderungen an ein Simulations-Programm für das Ziegenproblem:

- zufällige Torwahl für verstecktes Auto
- zufällige Torwahl des Kandidaten
- Toröffnen eines Ziegentors, das nicht gleich dem gewählten Tor ist
- Wenn das Auto hinter der gewählten Tür steht: Punkt für „Nicht-Wechseln“,
sonst: Punkt für „Wechseln“

Algorithmus (Duden Informatik):

„eine Verarbeitungsvorschrift, die so präzise formuliert ist, dass sie von einem mechanisch oder elektronisch arbeitenden Gerät durchgeführt werden kann. ...“

Ziegenproblem - Erklärungsansätze - Implementierung

```
program ziegenproblem;
var
  {wahl1: 1. Torwahl des Kandidaten; wahlS: Tor, das vom Spielleiter geoeffnet wird; auto: Tor, hinter dem das Auto ist}
  wahl1, wahlS, auto:      integer;
  {treffer1: Anzahl der Gewinne bei der "Nicht-Wechsel-Strategie"; treffer2: Anzahl der Gewinne bei der "Immer-Wechsel-Strategie"}
  treffer1, treffer2 :    real;
  {i: Schleifenzaehler; versuch: Anzahl der Versuche}
  i, versuch :            longint;

begin
  randomize; { Zufallszahlengenerator initialisieren }
  treffer1:=0; treffer2:=0; versuch:=0;
  write('Wieviel Versuche ? '); readln(versuch);

  for i:=1 to versuch do
    begin
      { die Tuer fuer das Auto wird per Zufall von 1 bis 3 generiert }
      auto:=trunc(random*3+1);

      { Der Kandidat waehlt eine Tuer von 1 bis 3 }
      wahl1:=trunc(random*3+1);
```

Ziegenproblem - Erklärungsansätze - Implementierung

```
{ Spielleiter oeffnet ein anderes Tor mit einer Ziege dahinter}
repeat
    wahlS:=trunc(random*3+1);
until (wahlS<>auto) and (wahlS<>wahl1);

if wahl1=auto then treffer1:=treffer1+1
else treffer2:=treffer2+1;

    writeln(' Auto ',auto,' Kandidaten-Wahl ',wahl1,' Moderator oeffnet ', wahlS);
end;

writeln('*** Ergebnisse ***');
writeln('Gewinnquote bei der "Nicht-Wechsel-Strategie": ',
(treffer1/versuch) : 10: 7);
writeln('Gewinnquote bei der "Immer-Wechsel-Strategie": ',
(treffer2/versuch) : 10: 7);
readln;
end.
```

ziegenprob2.pas

Ziegenproblem - Erklärungsansätze - Implementierung

Programmierkonzepte

Konkatenation (Duden Informatik):

„Die Konkatenation zweier Wörter x und y [...] ist das Wort, das sich durch Hintereinanderschreiben der beiden Wörter ergibt“

Iteration (Duden Informatik):

„Bezeichnung für das wiederholte Durchlaufen von Anweisungen oder Anweisungsfolgen oder die wiederholte Anwendung einer Funktion. [..]“

Ziegenproblem - Erklärungsansätze - Implementierung

Programmierkonzepte

Alternative (Duden Informatik):

„Bezeichnung für die if ... then ... else – Anweisung, die zwei verschiedene Fortsetzungen erlaubt“

If (Duden Informatik):

„grundlegendes Sprachelement der Programmierung für die Fallunterscheidung und die Verzweigung“

Ziegenproblem - Fazit – Fundamentale Ideen

Algorithmisierung

- Entwurfsparadigmen
- + Programmierkonzepte: Konkatenation, Alternative, Iteration
- Ablauf
- + Evaluation: Korrektheit, Komplexität

Strukturierte Zerlegung

- Modularisierung
- + Hierarchisierung: Darstellung: Baum
- Orthogonalisierung

Sprache

- + Syntax
- + Semantik

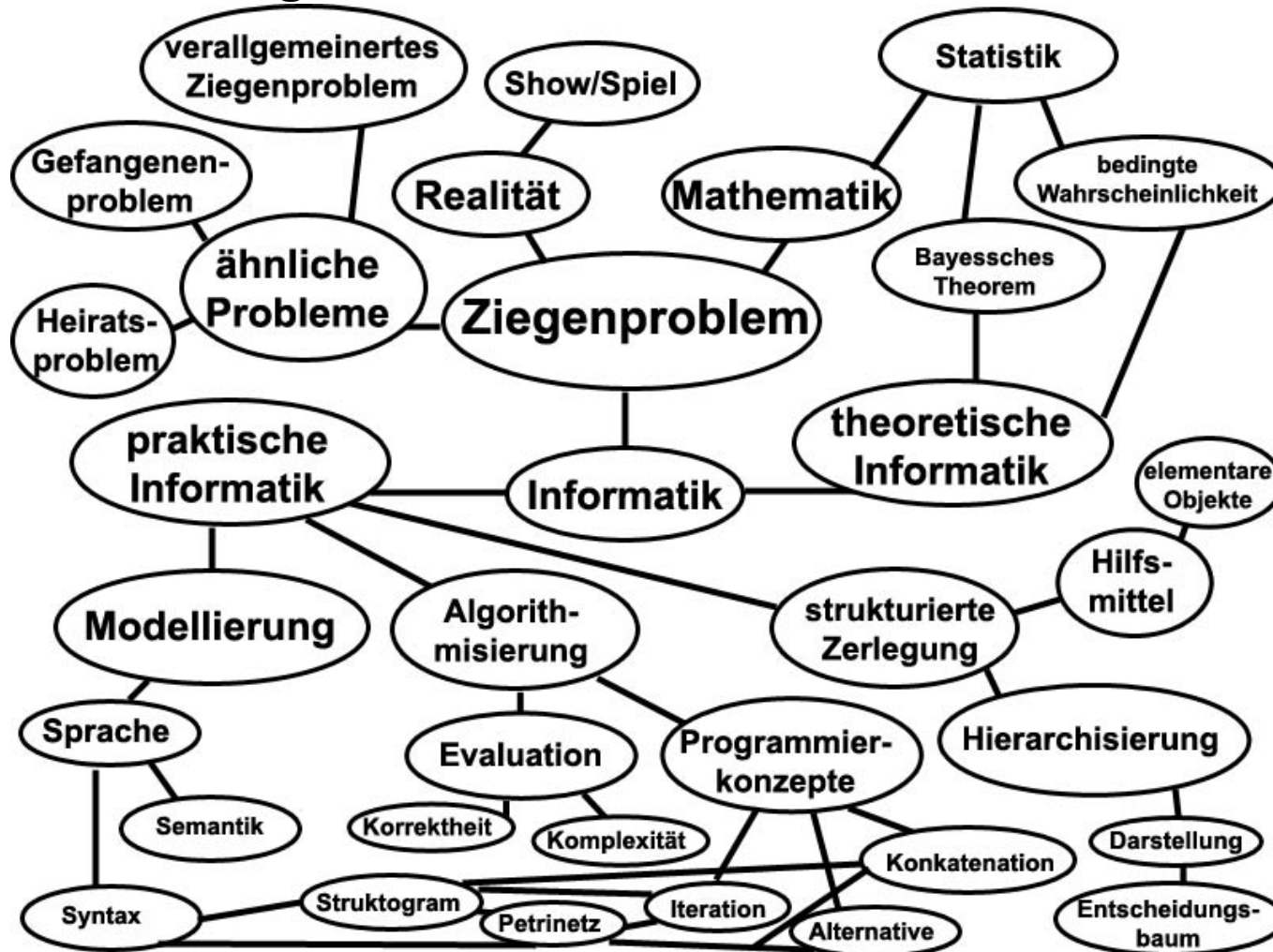
Ziegenproblem - Fazit – Fundamentale Ideen

Glossar

- Algorithmus
- Alternative
- Bayes'sches Theorem
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Entscheidungsbaum
- Gesetz der großen Zahl
- Iteration
- Konkatenation
- Simulation
- Totale Wahrscheinlichkeit

Ziegenproblem – Fazit - Gegenstandsanalyse

Wie ist der Gegenstand strukturiert?



Ziegenproblem – Fazit - Gegenstandsanalyse

Wie ist der Gegenstand didaktisch zu reduzieren?

- a) für Kinder: spielerische Darstellung z.B. durch 3 Tassen, unter denen 1 Bonbon und 2 Bonbonpapiere versteckt sind
- b) für Schüler: wie a, Problembeschreibung, animiertes Programm abspielen, Erklärung der Strategien, Entscheidungsbaum und Implementierung
- c) für Studenten: wie b, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Bayes'sches Theorem

Welche Kernpunkte sollen vermittelt werden

- es ist nicht immer alles so, wie es scheint
- bedingte Wahrscheinlichkeiten, Bayes'sches Theorem
- Entscheidungsbaum
- Implementierung

Ziegenproblem - Fazit - Schlüsselproblem

Anhaltspunkte für die Vorstellung eines Schlüsselproblems:

In welche Teilgebiete der Informatik lässt es sich einordnen?

- Theoretische, praktische Informatik

Wofür steht es exemplarisch?

- Bedingte Wahrscheinlichkeit, Entscheidungsbaum, Bayes'sches Theorem

Wie ist es in der Lebenswelt verankert?

- illustriert reales Problem, bei dem die Meinungen auseinander gehen

Gegenstandsanalyse + Mindmap

Ziegenproblem - Ähnliche Probleme

Das verallgemeinerte Ziegenproblem

- n Türen ($n \geq 3$), $n-1$ Ziegen, 1 Auto
- Ablauf äquivalent zum Ziegenproblem mit 3 Türen bis darauf, dass $n-2$ Türen vom Moderator geöffnet werden
- n verschlossene Tore am Anfang
 - $1/n$ %ige Wahrscheinlichkeit das richtige Tor zu wählen
 - $(n-1)/n$ %ige Wahrscheinlichkeit ein Ziegentor zu wählen
- Moderator öffnet $n-2$ Tore mit Ziegen dahinter
- es bleiben 2 Tore übrig

Ziegenproblem - Ähnliche Probleme

Ziegenproblem - Das verallgemeinerte Ziegenproblem

- Sehr ähnliche Probleme, da gleiche Thematik (nur unterschiedliche Anzahl an Türen)
- „Das verallgemeinerte Ziegenproblem“ ist gut zur Verdeutlichung, dass ein Türwechsel sinnvoll ist

Ziegenproblem - Ähnliche Probleme

Heirats- / Sekretärinnenproblem

- n Prinzen halten um die Hand der Prinzessin an
- Vor.: Prinzessin kann die Qualitäten der Prinzen einschätzen
- Sie muss sich nach jedem Prinzen sofort entscheiden, ob sie ihn heiratet oder nicht
- Ziel: Wahrscheinlichkeit den besten Prinzen auszuwählen zu maximieren

Ziegenproblem - Ähnliche Probleme

Heirats- / Sekretärinnenproblem

Strategie:

1. Betrachte die ersten s Prinzen mit $1 \leq s < n$ und lehne sie ab.
 2. Wähle von den verbleibenden $n - s$ Prinzen den ersten, der besser ist als jeder der ersten s Prinzen aus.
- für große n ist der optimale Wert für $s \approx n/e$
($e = 2,718281828459\dots$ Eulersche Zahl)
 - Wahrscheinlichkeit den besten Prinzen zu wählen: $1/e$.
Für kleinere Werte von s ist diese Wahrscheinlichkeit immer höher.

Ziegenproblem - Ähnliche Probleme

Heirats- / Sekretärinnenproblem

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{j=s+1}^n \frac{s}{j-1} = \frac{s}{n} \sum_{j=s}^{n-1} \frac{1}{j}$$

- n Prinzen
- ersten s Prinzen mit $1 \leq s < n$
- Bester Prinz kommt an j-ter Stelle



F. Thomas Bruss ist Professor für Mathematik und Präsident des Mathematischen Departements der Freien Universität Brüssel (Université Libre de Bruxelles).

A note on bounds for the odds-theorem of optimal stopping. Von F. Thomas Bruss in: Annals of Probability, Bd. 31, S. 1859 (2003)

A unified approach to a class of best choice problems with an unknown number of options. Von F. Thomas Bruss in: Annals of Probability, Bd. 12, S. 882 (1984)

Dynamic programming and decision theory. Von D. V. Lindley in: Applied Statistics, Bd. 10, S. 35 (1961)

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.

Ziegenproblem - Ähnliche Probleme

Heirats- / Sekretärinnenproblem



102

SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT | MAI 2004

Ziegenproblem - Ähnliche Probleme

Heirats- / Sekretärinnenproblem



Ziegenproblem - Ähnliche Probleme

Ziegenproblem - Heirats- / Sekretärinnenproblem

- Bei beiden Problemen besteht die Möglichkeit sich für etwas anderes (eine andere Tür / einen anderen Prinzen) zu entscheiden
- Heiratsproblem jedoch deutlich komplexer (bester Bewerber leider unbekannt)

Ziegenproblem - Quellen

- Olle Häggström : ***Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie***. Springer, Berlin 2005. ISBN 35402305. Seiten 7-20
- Gero von Randow: ***Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten***. Rowohlt, Reinbek 2005. ISBN 3499619052
- Walter Krämer: **Denkste! Trugschlüsse aus der Welt der Zahlen und des Zufalls**. Serie Piper. ISBN: 3492224431. Seiten 90-97
- Ian Stewart: **Das Versteck der Andromeda. Neue Mathematische Kurzgeschichten**. Spektrum Akademischer Verlag 2000. ISBN: 3827400260. Seiten 7-17

Ziegenproblem - Quellen

- Volker Claus, Andreas Schwill: **Duden Informatik – Ein Fachlexikon für Studium und Praxis**. Bibliographisches Institut, Mannheim, 3. Auflage 2001. ISBN: 3411100230
- Log In 19 (1999) Heft ¾ „Computer-Knobelei: Das Drei-Türen-Problem“ (Seiten 117-118)
- DIE ZEIT 18.11.2004 Nr.48 „**Das Rätsel der drei Türen**“
<http://www.zeit.de/2004/48/N-Ziegenproblem> (Stand: 03.05.06)
- Spektrum der Wissenschaft, Mai 2004, „Strategie der besten Wahl“ (Heiratsproblem)
http://www.wissenschaft-online.de/spektrum/pdf/frei/SdW_04_05_S102.pdf
(Stand: 03.05.06)
- Simulation zum Download: <http://www.procommerz.de/wissen/ziegenproblem/>
(Stand: 03.05.06)
- JavaScript-Simulation:
<http://www.userpages.de/ziegenproblem/> (Stand: 03.05.06)

Ziegenproblem - Quellen

- Frederik Ramm
<http://www.remote.org/frederik/projects/ziege/> (Stand: 03.05.06)
- Who's the Goat . . . Marilyn or the Mathematicians?
<http://www.willamette.edu/cla/math/articles/marilyn.htm> (Stand: 03.05.06)
- Robert Koch
<http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/staff/phpages/koch/ziegen/ziegen.html> (Stand: 03.05.06)
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem> (Stand: 03.05.06)
- http://de.wikipedia.org/wiki/Bedingte_Wahrscheinlichkeit (Stand: 03.05.06)
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Bayes-Theorem> (Stand: 03.05.06)

ENDE



© <http://www.spiegel.de/img/0.1020.351865.00.jpg>