Proseminar „Schlüsselprobleme der Informatik“

Das Ziegenproblem

von

Sylvia Richter

Matr.-Nr.: 720575

Universität Potsdam
Institut für Informatik
Professur Didaktik der Informatik

Aufgabenstellung und Betreuung:
Ralf Romeike

Potsdam

6. August 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Das Ziegenproblem war und ist ein heiß umstrittenes Thema. „Die Antwort, wonach die Mitspielerin die Tür wechseln solle, wurde in den Sitzungssälen der CIA und in den Baracken der Golfkrieg-Piloten debattiert. Sie wurde von Mathematikern am Massachusetts Institute of Technology und von Programmierern am Los Alamos National Laboratory in New Mexico untersucht und in über tausend Schulklassen des Landes analysiert.“ (New York Times, 21.7.1991, [14]) Dies sowie Aussagen, dass es sich um eine 50-zu-50-Chance handeln würde, zeigen dass großer Klärungsbedarf von Nöten ist. Deshalb ist das Ziel dieser Arbeit, zunächst das Ziegenproblem zu beschreiben und letztendlich die Gewinnwahrscheinlichkeiten der einzelnen Strategien zu begründen.
Im ersten Kapitel wird die Entstehung und Beschreibung des Problems herausgearbeitet. Danach werden im zweiten Kapitel zwei mögliche Strategien sowie die dazugehörigen Gewinnwahrscheinlichkeiten betrachtet. Dieses Kapitel schließt mit der Fragestellung ob, es eine bessere Strategie gibt. Das dritte Kapitel erklärt die Gewinnchancen auf unterschiedliche Weisen: vom *Entscheidungsbaum* über das *Bayes'sches Theorem* bis hin zu einer Implementierung. Diesen Kapitel folgt die didaktische Betrachtung, die das Ziegenproblem bezüglich fundamentaler Ideen der Informatik untersucht. Ferner wird eine Gegenstandsanalyse durchgeführt und der Frage, ob es sich um ein Schlüsselproblem handelt, auf den Grund gegangen. Abgeschlossen wird dieses Kapitel mit einer sprachlich und inhaltlich einfachen Beschreibung des Ziegenproblems für Nicht-Informatiker. Im fünften Kapitel stehen ähnliche Probleme, das verallgemeinerte Ziegenproblem, das Heirats-/Sekretärinnenproblem und die aktuelle Spielshow „Deal or no deal“ im Vordergrund. Das Fazit schließt die Arbeit ab. Die kursiv gekennzeichneten Wörter werden im Glossar beschrieben, welches sich im Kapitel 7 befindet.

1.1 Entstehung

Bereits 1889 gab es ein ähnliches Problem. Mit ihm beschäftigte sich 1889 der französische Mathematiker Joseph Bertrand (französischer Mathematiker und Pädagoge): Es war das „Drei-Kasten-Problem“. In den 70er Jahren moderierte Monty Hall auf NBC Television Network die amerikanische Spielshow „Let's Make a Deal“. In dieser Show ging es um drei Tore, hinter denen sich stets ein Hauptgewinn - meist ein Auto - und zwei Nieten - meist Ziegen - verbargen. Nachdem der Kandidat sich für eines der Tore entschieden hatte, feilschte der Moderator Monty Hall mit Geld und öffnete eines der Tore, das der Kandidat nicht gewählt hat und hinter dem sich eine Niete (Ziege) befand. Danach bekam der Kandidat die Chance, das Tor zu wechseln.
1990 erhielt Marilyn vos Savant, die Frau mit dem angeblich höchsten IQ der Welt, die folgende Frage, welche sie in der Zeitschrift „Parade Magazin“ veröffentlichte:
„Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors: Behind one door is a car; behind the others, goats. You pick a door, say No. 1, and the host, who knows what's behind the other doors, opens another door, say No. 3, which has a goat. He then says to you, 'Do you want to pick door No. 2?' Is it to your advantage to take the switch?“ [15]
Sie antwortete auf diese Frage und seitdem ist das Problem als Ziegen- bzw. Monty-Hall-Problem bekannt. Wie bereits oben erwähnt, löste es heftige Debatten aus. Viele Leute mochten der Antwort von Marilyn vos Savant nicht glauben und verfassten derbe Briefe, wie es auf der Website des Willamette University Mathematics Departments [3] nachzulesen ist.

1.2 Problembeschreibung

Drei Tore stehen dem Kandidaten zur Wahl. Hinter einem der Tore befindet sich ein Auto und hinter den anderen beiden steht jeweils eine Ziege.

1. „Der Kandidat wählt ein Tor aus, welches aber vorerst verschlossen bleibt.
2. Daraufhin öffnet der Moderator, der die Position des Gewinns kennt, eines der beiden anderen Tore, hinter dem sich eine Ziege befindet. Im Spiel befinden sich also noch ein Gewinn und eine Niete.

3. Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere Tor zu wählen.

Wie soll sich der Kandidat entscheiden, um seine Gewinnchance zu maximieren?“ [9]

„Etwa 99 Prozent sind der Meinung, dass das Auto ebenso gut hinter der einen wie der anderen Tür stehen kann, fast 90 Prozent entscheiden sich angesichts dieser vermeintlichen Sachlage dafür, bei der ursprünglichen Tür zu bleiben.“ [16]

2 Mögliche Strategien

Um unsere Gewinnchancen zu maximieren und somit auf ähnliche Problematiken entsprechend eingehen zu können, wollen wir nun mögliche Strategien entwickeln. Hierfür ist es sinnvoll, eine große Anzahl von Versuchsdurchgängen auszuführen, um eine möglichst genaue Vorhersage treffen zu können. Man nähme beispielsweise den Münzwurf, bei dem es bekannterweise eine 50-50-Chance gibt zu gewinnen. Wird nur einmal geworfen, so kann nur einmal Zahl oder Kopf als Ergebnis herauskommen, was dann einer *Wahrscheinlichkeit* von 100% entspricht. Je öfter der Münzwurf wiederholt wird nähert sich Gewinnwahrscheinlichkeit der 50%-Grenze an. Dies liegt am *Gesetz der großen Zahlen*, welches aussagt, dass häufiges Durchführen von Versuchen beziehungsweise *Simulation*en zu genaueren Ergebnissen führt.
Mögliche Strategien in Bezug auf das Ziegenproblem wären daher beispielsweise bei Mehrfachversuchen: Nach dem Öffnen eines Tores mit einer dahinter stehenden Ziege, stets beim gleichen Tor zu bleiben (im Folgenden als „Nicht-Wechsel“-Strategie bezeichnet) oder in der selben Situation stets das Tor zu wechseln (im Folgenden als „Immer-Wechsel“-Strategie bezeichnet).

2.1 „Nicht-Wechsel“-Strategie

Bei der „Nicht-Wechsel“-Strategie bleibt der Kandidat bei mehrmaliger Versuchsdurchführung stets bei seiner ersten Torwahl. Daraus ergeben sich die in Abbildung 1 dargestellten drei Fälle. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wurde hierfür festgelegt, dass sich hinter den Toren 1 und 2 Ziegen und hinter dem Tor 3 ein Auto befinden.

Abbildung 1: „Nicht-Wechsel“-Strategie

Wählt der Kandidat am Anfang das Tor 1, hinter dem sich eine Ziege befindet, so kann ihm der Moderator nur noch das Tor 2 zeigen, da er nur ein Tor öffnen kann, welches ungleich der Kandidatenwahl und nicht gleich dem Tor ist, hinter dem sich das Auto befindet. Dadurch, dass der Kandidat nicht wechselt, verliert er.
Im nächsten Fall wählt der Kandidat das Tor 2, hinter welchem auch eine Ziege steht. Dieser Fall ähnelt dem vorhergehenden. Der Moderator kann nur das Tor 1 öffnen. Da der Kandidat bei seiner Erstwahl bleibt, verliert er wiederum.
Nun gehen wir davon aus, dass der Kandidat gleich am Anfang das Auto gewählt hat. Der Moderator kann ihm in diesem Fall eine von zwei unterschiedlichen Toren mit Ziegen präsentieren. Ohne Torwechsel wird der Kandidat gewinnen.
Folglich verliert der Kandidat bei der „Nicht-Wechsel"-Stratege in zwei von drei Fällen und gewinnt in einem von drei Fällen, und zwar nur dann, wenn er das Auto gleich am Anfang gewählt hat.

2.2 „Immer-Wechsel"-Strategie

Bei der „Immer-Wechsel"-Strategie entscheidet sich der Kandidat bei mehrmaliger Versuchsdurchführung stets um. Die möglichen drei Fälle werden in Abbildung 2 dargestellt. Hier gilt ebenfalls ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass sich hinter den Toren 1 und 2 Ziegen und hinter dem Tor 3 ein Auto befinden.

Abbildung 2: „Immer-Wechsel"-Strategie

Im ersten Fall wählt der Kandidat das Tor 1, mit einer Ziege dahinter. Der Moderator kann ihm folglich nur das andere Tor mit einer Ziege dahinter, Tor 2, zeigen. Durch einen Torwechsel von 1 auf 3 gewinnt der Kandidat.
Wählt der Kandidat Tor 2, hinter dem sich eine Ziege befindet, so kann der Moderator wiederum nur das andere Tor mit einer Ziege dahinter, Tor 1, öffnen. Durch das Wechseln, gewinnt der Kandidat auch in diesem Fall.
Wenn der Kandidat gleich am Anfang das Tor wählt, hinter dem das Auto steht, Tor 3, so kann ihm der Moderator eines der beiden anderen Tore 1 und 2 mit Ziegen dahinter öffnen. In diesem Fall verliert der Kandidat.
Insgesamt gesehen, gewinnt der Kandidat bei der „Immer-Wechsel"-Strategie in zwei von drei Fällen und verliert in einem von drei Fällen, und zwar nur dann, wenn er gleich am Anfang das Auto gewählt hat.

2.3 Gewinnwahrscheinlichkeit

Die *Wahrscheinlichkeit*, dass der Kandidat bei den beiden Strategien das Auto gewinnt, beträgt bei der „Nicht-Wechsel"-Strategie $\frac{1}{3}$ und bei der „Immer-Wechsel"-Strategie $\frac{2}{3}$. Dieses Ergebnis wird in Abbildung 3 dargestellt.

$$p(\text{Auto}) = \begin{cases} 1/3 \text{ „Nicht-Wechsel"-Strategie} \\ 2/3 \text{ „Immer-Wechsel"-Strategie} \end{cases}$$

Abbildung 3: Gewinnwahrscheinlichkeit

Folglich scheint die „Immmer-Wechsel"-Strategie die beste Strategie zu sein.

2.4 Gibt es eine bessere Strategie?

Um zu überprüfen, ob es eine bessere Strategie gibt, bei der eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit als $\frac{2}{3}$ erzielt werden kann, wird angenommen, dass der Kandidat sich mit einer *Wahrscheinlichkeit* w um entscheidet. Da am Anfang aus drei Toren eines gewählt werden muss, ist die *Wahrscheinlichkeit* $\frac{1}{3}$. Hierauf wird nun w addiert: $\frac{(w+1)}{3}$.

Da für die *Wahrscheinlichkeit* w die Aussage $0 \leq w \leq 1$ gilt, ist die Gewinnwahrscheinlichkeit für $w = 1$ am Größten. Folglich gilt für den Quotienten

$\frac{(w+1)}{3} = \frac{(1+1)}{3} = \frac{2}{3}$.

Somit ist die „Immer-Wechsel"-Strategie die bestmögliche Strategie. Dieser Nachweis ist inhaltlich entnommen aus dem Buch „Das Versteck der Andromeda" [12].

3 Erklärungsansätze

3.1 Entscheidungsbaum

Entscheidungsbäume werden hauptsächlich in der Spieltheorie verwendet, da bei dieser mit Gewinnwahrscheinlichkeiten hantiert werden muss. In Abbildung 4 ist der dazugehörige *Entscheidungsbaum* für die „Nicht-Wechsel"-Strategie dargestellt. Der schwarze Punkt soll die Wurzel repräsentieren. Zu Beginn des Spieles stehen drei Tore zur Wahl, von denen sich der Kandidat eines auswählen soll. Folglich ist die *Wahrscheinlichkeit* $\frac{1}{3}$ für jeden der drei Zweige. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei das Auto hinter dem Tor 1. Wählt der Kandidat am Anfang das Tor mit dem dahinter stehenden Auto, so kann der Moderator zwischen zwei Toren mit Ziegen wählen. Folglich ist die *Wahrscheinlichkeit* $\frac{1}{2}$, dass der Moderator das Tor 2 wählt oder entsprechend das Tor 3. Da der Kandidat nie das Tor wechselt, tritt das sichere Ereignis ein, da es feststeht, dass er am Tor 1 festhält. Anhand des *Entscheidungsbaum*es können sehr leicht die Gewinnwahrscheinlichkeiten berechnet werden indem die einzelnen Zweige bis zum Blatt hin multipliziert werden. Dies ergibt jeweils $\frac{1}{6}$. Da beide Zweige zu einem Gewinn führen, müssen die beiden Ergebnisse miteinander addiert werden, sodass eine *Wahrscheinlichkeit* von $\frac{1}{3}$ entsteht.

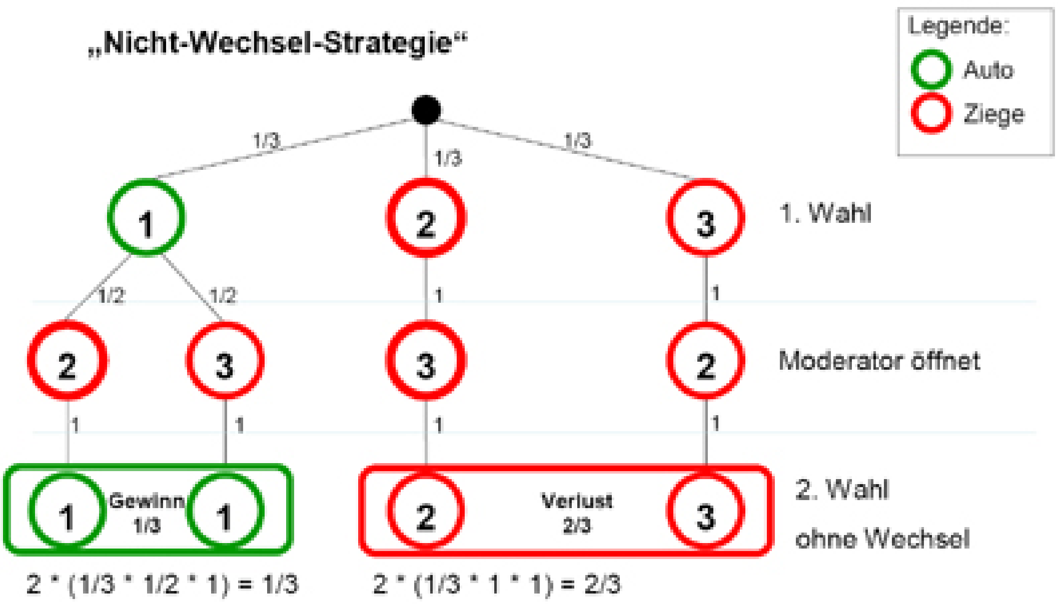

Abbildung 4: figure
Entscheidungsbaum für die „Nicht-Wechsel“-Strategie

In den beiden Fällen, bei denen der Kandidat zunächst ein Ziegentor gewählt hat, kann der Moderator nur noch das andere Tor mit einer Ziege dahinter öffnen. Da dem Moderator keine andere Wahl bleibt, ist dies das sichere Ereignis. Ebenfalls steht fest, dass der Kandidat bei seiner Entscheidung bleibt und nicht das Tor wechselt. Folglich ist dies auch das sichere Ereignis. Insgesamt wird der Kandidat in $\frac{2}{3}$ der Fälle verlieren.

Genauso lässt sich der *Entscheidungsbaum* für die „Immer-Wechsel“-Strategie erstellen, welcher in Abbildung 5 dargestellt ist. Die Abzweigungen von der Wurzel bis hin zum Öffnen eines Tores sind äquivalent zur „Nicht-Wechsel“-Strategie. Der einzige Unterschied sind die Blätter des *Entscheidungsbaum*es, da der Kandidat das Tor wechselt. Auch an diesem *Entscheidungsbaum* lassen sich die *Wahrscheinlichkeit*en ablesen: Bei der „Immer-Wechsel“-Strategie verliert der Kandidat in $\frac{1}{3}$ der Fälle und gewinnt in $\frac{2}{3}$ der Fälle.

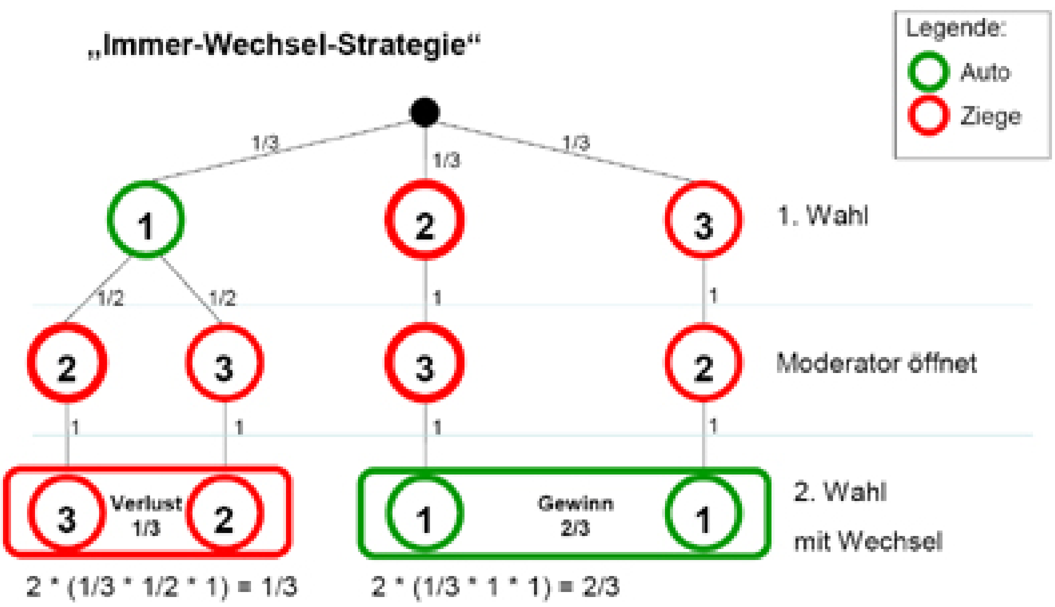

Abbildung 5: *Entscheidungsbaum* für die „Immer-Wechsel“-Strategie

3.2 Bayes‘sches Theorem

Das Ziegenproblem lässt sich auch wahrscheinlichkeitstheoretisch begründen. Hierfür ist das *Bayes‘sche Theorem* hilfreich, welches angibt, in welcher Weise mit *bedingte*n *Wahrscheinlichkeiten* gerechnet wird.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)*P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)*P(A_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(B|A_j)*P(A_j)} \text{ [5]}$$

$P(A_i|B)$ ist die *Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten des Ereignisses A_i, wenn B bereits eingetreten ist. P(B) ist die *totale Wahrscheinlichkeit*. Sie beschreibt, mit welcher *Wahrscheinlichkeit* p(B) ein bestimmtes Ereignis B aus einer Menge von Ereignissen A_1 bis A_n folgt. Beim Ziegenproblem ist die *totale Wahrscheinlichkeit*:
p(B) für N=3 (3 Tore): $p(B) = p(A_1) * p(B|A_1) + p(A_2) * p(B|A_2) + p(A_3) * p(B|A_3)$
Wird dies in das Theorem eingesetzt, ergibt sich:
$p(A_i|B) = \frac{p(A_i)*p(B|A_i)}{p(A_1)*(p(B|A_1)+p(A_2)*p(B|A_2)+p(A_3)*p(B|A_3)}$.
Im Folgenden werden die Tore mit L_1, L_2, L_3 bezeichnet. Das Tor, hinter dem das Auto steht, sei L_i mit A_i, wobei i=1,2,3. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählt der Kandidat Tor L_1 und der Moderator öffnet Tor L_2. Folglich befindet sich der Sportwagen entweder hinter Tor L_1 oder L_3 , das heißt es gilt A_1 oder A_3. B sei das Ereignis, dass der Moderator Tor L_2 geöffnet hat.
Wir betrachten nun die *Wahrscheinlichkeit*, dass das Auto hinter dem Tor L_3 vorzufinden ist, unter der Bedingung, dass B eingetroffen ist, also der Moderator Tor L_2 geöffnet hat und setzen entsprechen in der Formel ein:
$p(A_3|B) = \frac{p(A_3)*p(B|A_3)}{p(A_1)*(p(B|A_1)+p(A_2)*p(B|A_2)+p(A_3)*p(B|A_3)}$.
Um die *bedingte Wahrscheinlichkeit* zu berechnen, müssen zunächst die einzelnen *bedingten Wahrscheinlichkeit*en bestimmt werden.
Die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass der Moderator das Tor L_2 mit einer Ziege dahinter öffnet, unter der Bedingung, dass hinter Tor L_3 das Auto steht, ist das sichere Ereignis. Da der Kandidat Tor L_1 gewählt hat und das Auto hinter dem dritten Tor steht, kann der Moderator nur das Tor L_2 öffnen. Folglich gilt: $P(B|A_3) = 1$.
Dass der Moderator das Tor L_2 mit einer Ziege dahinter öffnet unter der Bedingung, dass das Auto hinter dem Tor L_1 steht, ist $\frac{1}{2}$, da der Moderator eines der beiden Tore L_2 und L_3 öffnen kann. Somit gilt: $p(B|A_1) = \frac{1}{2}$
Die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass der Moderator das Tor L_2 mit einer Ziege dahinter öffnet unter der Bedingung, dass hinter dem Tor L_2 das Auto ist, ist das unmögliche Ereignis. Hinter einem Tor können sich nicht sowohl das Auto als auch die Ziege befinden, somit gilt $p(B|A_2) = 0$.
Die Ereignisse p(A_1), p(A_2), p(A_3) treten jeweils mit einer *Wahrscheinlichkeit* von $\frac{1}{3}$ auf, da das Auto sich mit einer *Wahrscheinlichkeit* von $\frac{1}{3}$ hinter einem der drei Tore L_1, L_2, L_3 befindet.
Nach Einsetzen der Werte ergibt sich:
$p(A_3|B) = \frac{\frac{1}{3}*1}{\frac{1}{3}*\frac{1}{2}+\frac{1}{3}*0+\frac{1}{3}*1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$
Folglich ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass das Auto sich hinter dem Tor L_3 befindet unter der Bedingung, dass unter dem Tor L_2 eine Ziege steht $\frac{2}{3}$. Anhand dieser *Wahrscheinlichkeit* lässt sich die *Wahrscheinlichkeit*, dass das Auto hinter dem Tor L_1 steht, unter der Bedingung des geöffneten Tores L_2 wie folgt berechnen:
$p(A_1|B) = 1 - p(A_3|B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Dies beruht darauf, dass die Aufsummierung aller Ereignisse stets Eins ist.
Der Nachweis ist angelehnt entnommen aus dem Buch „Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie“ [10].

3.3 Implementierung

Wie bereits erwähnt, sind Computersimulationen sinnvoll, um möglichst viele Versuche durchzuführen, also dem *Gesetz der großen Zahlen* gerecht zu werden. Bevor eine *Monte-Carlo-Simulation* programmiert wird, sollten die Anforderungen an das Programm in Bezug auf das Ziegenproblem betrachtet werden. Zunächst müssen Zufallszahlen für das Tor, hinter dem das Auto sich versteckt und für die Kandidatenwahl generiert werden. Hierbei ist anzumerken, dass Computer deterministische Maschinen sind und aufgrund dieser Begrenzung keine zufälligen Zahlen generieren können. Sie können lediglich so genannte Pseudozufallszahlen erzeugen. Nach der zufälligen Torverteilung muss ein Tor ausgewählt werden, welches nicht der Wahl des Kandidaten entspricht und hinter

dem sich auch kein Auto befindet. Wenn das Auto hinter dem gewählten Tor steht, wird die Trefferrate für die „Nicht-Wechsel“´-Strategie um eins inkrementiert, sonst wird die Trefferrate für die „Immer-Wechsel“-Strategie um eins inkrementiert.
Der folgende *Algorithmus* wurde von der Verfasserin in Turbo Pascal programmiert:

```
program ziegenproblem;
var
{wahl1: 1. Torwahl des Kandidaten; wahlS: Tor, das vom Spielleiter geoeffnet wird; auto: Tor, hinter dem das Auto ist}
wahl1, wahlS, auto: integer;
{treffer1: Anzahl der Gewinne bei der „Nicht-Wechsel“-Strategie; treffer2: Anzahl der Gewinne bei der „Immer-Wechsel“-Strategie}
treffer1, treffer2 : real;
{i: Schleifenzaehler; versuch: Anzahl der Versuche}
i, versuch : longint;

begin
randomize; { Zufallszahlengenerator initialisieren }
treffer1:=0; treffer2:=0; versuch:=0;
write('Wieviel Versuche ? '); readln(versuch);

for i:=1 to versuch do
    begin
    { die Tuer fuer das Auto wird per Zufall von 1 bis 3 generiert }
    auto:=trunc(random*3+1);
    { Der Kandidat waehlt eine Tuer von 1 bis 3 }
    wahl1:=trunc(random*3+1);
    { Spielleiter oeffnet ein anderes Tor mit einer Ziege dahinter }
    repeat
        wahlS:=trunc(random*3+1);
    until (wahlS<>auto) and (wahlS<>wahl1);

    if wahl1=auto then treffer1:=treffer1+1
    else treffer2:=treffer2+1;
    writeln(' Auto ',auto,' Kandidaten-Wahl ',wahl1,' Moderator oeffnet ', wahlS);
    end;
writeln('*** Ergebnisse ***');
writeln('Gewinnquote bei der Nicht-Wechsel-Strategie": ',
(treffer1/versuch) : 10: 7);
writeln('Gewinnquote bei der Ïmmer-Wechsel-Strategie": ',
(treffer2/versuch) : 10: 7);
readln;
end.
```

Zunächst werden die Variablen deklariert. Hierfür stehen entsprechende Kommentare im Quelltext. Danach wird der Zufallszahlengenerator und die Trefferquoten für die „Nicht-Wechsel“- und „Immer-Wechsel“-Strategie

initialisiert. Danach erfolgt die Initialisierung der Anzahl der Versuche auf Null. Dem folgt die Abfrage, wie viele Versuche durchgeführt werden sollen. Innerhalb der *Iteration* (der For-Schleife) wird das Spiel so oft durchgeführt, wie Versuche vom Benutzer angegeben wurden. Als erstes werden Pseudozufallszahlen für das Tor, hinter dem das Auto steht, und das vom Kandidaten gewählte Tor generiert. Das Öffnen eines Tores mit einer dahinter stehenden Ziege durch den Moderator wurde mittels einer weiteren *Iteration* (der Repeat-Until-Schleife) realisiert. Es werden so lange Pseudozufallszahlen für das Tor generiert bis das Tor nicht gleich demjenigen ist, welches der Kandidat gewählt hat und nicht gleich dem Tor ist, hinter welchem sich das Auto verbirgt. Die Pseudozufallszahlengenerierung ist für den Fall notwendig, dass der Kandidat am Anfang das Tor mit dem dahinter verborgenen Auto gewählt hat und der Moderator mit einer *Wahrscheinlichkeit* von $\frac{1}{2}$ eines der beiden Ziegentore öffnet. Um die beiden Strategien zu bewerten, wurde das Programmierkonzept der *Alternative* angewendet. Wenn der Kandidat das Tor mit dem Auto dahinter gewählt hat, so wird die Trefferrate für die „Nicht-Wechsel"-Strategie inkrementiert und sonst für die „Immmer-Wechsel"-Strategie. Damit die Torwahl besser nachvollziehbar ist, werden verschiedene Strings mittels einer *Konkatenation* verbunden und dann mittels dem Befehl „writeln" ausgegeben. Außerhalb der Schleife werden die Gewinnquoten entsprechend der Definition einer *Wahrscheinlichkeit* berechnet und ausgegeben.
Es sind auch viele *Simulation*en im Internet vorzufinden, u.a.: [13], [2]

4 Didaktische Betrachtungen

4.1 Fundamentale Ideen

Aufgrund der vorherigen Ausführungen und Analysen sind die folgenden fundamentalen Ideen der Algorithmisierung im Ziegenproblem verankert:

- Die Programmierkonzepte *Konkatenation*, *Alternative*, *Iteration* aufgrund der möglichen Realisierung als *Simulation*
- Die Evaluierung von Korrektheit und Komplexität, da zu jedem Quellcode eine solche Analyse durchgeführt werden kann

Weder die fundamentale Idee der Entwurfsparadigmen noch des Ablaufes sind im Ziegenproblem wiederzufinden.
Die strukturierte Zerlegung des Ziegenproblems geschieht durch Hierarchisierung mittels eines *Entscheidungsbaum*s. Jedoch sind Modularisierung und Orthogonalisierung nicht im Ziegenproblem verankert.
Dadurch, dass ein Quellcode erzeugbar ist, kann die Sprache bezüglich Syntax und Semantik betrachtet werden.
Im Ziegenproblem sind die folgenden Begriffe, welche auch im Glossar beschrieben werden, vorzufinden:

Algorithmus	*Alternative*
Bayes'sches Theorem	*Bedingte Wahrscheinlichkeit*
Entscheidungsbaum	*Gesetz der großen Zahl*
Iteration	*Konkatenation*
Monte-Carlo-Simulation	*Simulation*
Totale Wahrscheinlichkeit	*Wahrscheinlichkeit*

4.2 Gegenstandsanalyse

Wie ist der Gegenstand strukturiert?
Um die Zusammenhänge in Bezug auf das Ziegenproblem zu betrachten, ist es sinnvoll Brainstorming durchzuführen. Die Ergebnisse meines Brainstormings sind im Mindmap (Abbildung 6) dargestellt. Das Ziegenproblem ist zunächst einmal in der Realität verankert, wie das Beispiel der Monty-Hall-Show zeigt. Eine Show mit ähnlichem Konzept war beispielsweise auch „Geh aufs Ganze". Dort wurde jedoch mehr gepfeilscht und

außerdem gab es zumeist als drittes Tor einen mittleren Preis.
Das Ziegenproblem ist in der Mathematik im Bereich der Statistik aufgrund des *Bayes'schem Theorems* und den (bedingten) Wahrscheinlichkeiten wiederzufinden. Dieser wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekt lässt sich auch in der theoretischen Informatik wiederfinden. Mit dem Ziegenproblem wird ebenso der Bereich der praktischen Informatik durch Modellierung, Algorithmisierung und strukturierte Zerlegung sehr stark abgedeckt. Die Modellierung ist mittels einer Sprache möglich, welche Syntax und Semantik besitzt. Aus der Syntax eines Programmes lassen sich sowohl ein Petrinetz als auch ein Struktogramm erstellen. In diesen wiederum sind die Programmierkonzepte der Algorithmisierung *Iteration*, *Konkatenation* und *Alternative* wiederzufinden. Da das Ziegenproblem programmiert werden kann, lässt sich der Quellcode auch bezüglich der Korrektheit und Komplexität evaluieren. Als Hilfsmittel für die Programmierung werden lediglich elementare Objekte benötigt. Das Ziegenproblem ist mittels eines *Entscheidungsbaum*s (Hierarchisierung) darstellbar. In dieses Mindmap hätte noch der Aspekt der *Monte-Carlo-Simulation* mit den damit zusammenhängenden Pseudozufallszahlen mit aufgenommen werden können.

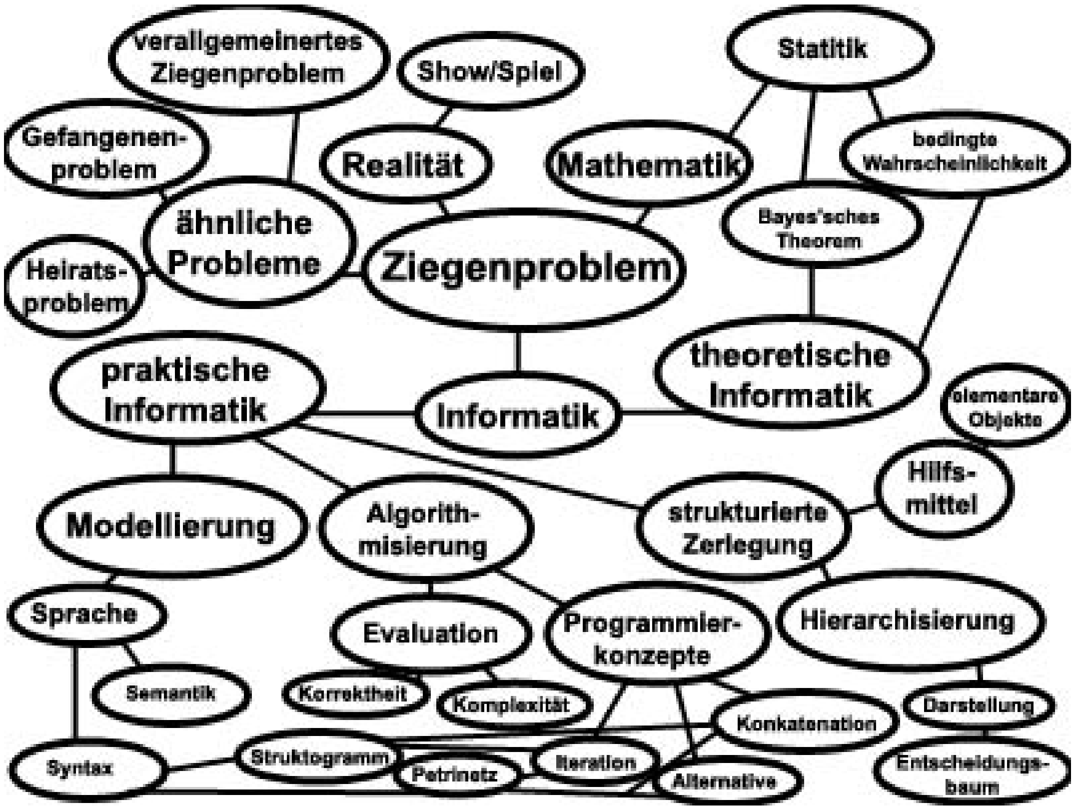

Abbildung 6: Wie ist der Gegenstand strukturiert?

Weitere Aspekte, wie die ähnlichen Probleme Heirats-/Sekretärinnenproblem, Gefangenenproblem und verallgemeinertes Ziegenproblem werden im folgenden Kapitel erläutert.

Wie ist der Gegenstand didaktisch zu reduzieren?
Das Ziegenproblem lässt sich für Kinder beispielsweise durch spielerische Darstellung aufzeigen. Hierfür können drei Tassen benutzt werden, unter denen sich ein Bonbon und zwei Bonbonpapiere befinden. Bei Schülern kann je nach Alter eine Problembeschreibung gegeben, ein animiertes Programm abgespielt, um die unterschiedlichen Strategien zu erklären. Ferner ist es möglich, anhand des Ziegenproblemes *Entscheidungsbäume* einzuführen oder aufzufrischen und die Schüler die Thematik implementieren zu lassen. In Gegenwart von Studenten können zusätzlich noch die wahrscheinlichkeitstheoretischen Aspekte, wie *bedingte Wahrscheinlichkeit*en und *Bayes'sches Theorem*, betrachtet werden.

Welche Kernpunkte sollen vermittelt werden?
Zunächst einmal zeigt das Ziegenproblemes, dass nicht immer alles so ist, wie es scheint. Als Kernpunkte, die zusätzlich vermittelt werden können, sind wiederum die Begriffe aus dem Glossar zu nennen.

4.3 Schlüsselproblem

Als Anhaltspunkte für die Betrachtung des Ziegenproblems als ein Schlüsselproblem sind die bereits betrachtete Gegenstandsanalyse sowie das Mindmap zu sehen. Das Ziegenproblem lässt sich sowohl in die theoretische als auch in die praktische Informatik einordnen. Es steht unter anderem exemplarisch für *Entscheidungsbäume*, *bedingte Wahrscheinlichkeit* und *Bayes'sches Theorem*. Außerdem ist es in der Lebenswelt verankert, denn es illustriert ein reales Problem, bei dem die Meinungen auseinander gehen.
Auch wenn diese Aspekte dafür sprechen, dass das Ziegenproblem ein Schlüsselproblem der Informatik ist, würde ich zu dem Schluss kommen, dass das Ziegenproblem kein Schlüsselproblem ist. Es streift lediglich ein Randbereiche der Informatik und enthält keinen tiefergehenderen Aspekt, wie beispielsweise Semaphore. Sehr viele Problematiken, vor allem solche aus der Spieletheorie, lassen sich in der praktischen Informatik aufgrund der Modellierung wiederfinden. Diese sind jedoch lediglich durch die Konzeption einer Computersimulation in diesem Bereich vorzufinden.

4.4 Sprachlich und inhaltlich einfache Beschreibung des Ziegenproblems

„Kaum eine andere mathematische Denkaufgabe hat die Gemüter (auch die ZEIT-Leser) in den vergangenen Jahren so erhitzt, wie das so genannte Ziegenproblem. Denn dem normalen, angeblich 'gesunden', Menschenverstand läuft die mathematisch korrekte Lösung derart zuwider, dass sich nur die wenigsten Zeitgenossen von ihr überzeugen lassen.“ [16]
Man stelle sich vor, in einer Quizshow zu sein, bei der der Moderator den Kandidaten zwischen drei verschlossenen Toren eines auswählen lässt. Hinter den Toren befinden sich zwei Ziegen und ein Auto versteckt. Ziel des Spieles, welches auf die Spielshow „Let's Make a Deal“ von Monty Hall zurück geht, ist es, das Auto zu gewinnen. Hat der Kandidat ein Tor gewählt, öffnet der Moderator, der weiß, wo sich welcher Gewinn befindet, ein Ziegentor, welches der Kandidat nicht gewählt hat. Danach bittet er den Kandidaten seine Wahl zu überdenken und eventuell das andere ungeöffnete Tor zu wählen.
Wie würden Sie sich verhalten? Intuitiv dachten selbst berühmte Mathematiker, dass es egal wäre, ob man wechsle oder nicht, da man eine 50-50-Chance hätte. Dies löste heftige Diskusionen mit der amerikanischen Autorin Marilyn vos Savant aus, die in ihrer Kolumne „Ask Marilyn“ (Zeitschrift „Parade Magazin“) behauptete, dass es sinnvoller wäre zu wechseln.
Dass sie recht hat, lässt sich einfach durch die Perspektive des Showmasters erkennen. Für die drei gleich wahrscheinlichen Tore gibt es drei Fälle:

- Auto: Tor 1, Kandidatenwahl: Tor 1
  Der Moderator öffnet entweder Tor 2 oder 3. Für den Kandidaten wäre folglich sinnvoll bei dem Tor zu bleiben

- Auto: Tor 3, Kandidatenwahl: Tor 1
  Der Moderator kann nur das Tor 2 öffnen, da er nicht das Tor öffnen darf, hinter dem sich das Auto befindet und auch nicht dasjenige, welches der Kandidat gewählt hat. Für den Kandidaten wäre es in diesem Fall sinnvoller zu Tor 3 zu wechseln.

- Auto: Tor 2, Kandidatenwahl: Tor 1
  Der Moderator kann nur das Tor 3 öffnen, da er nicht das Tor öffnen darf, hinter dem sich das Auto befindet und auch nicht dasjenige, welches der Kandidat gewählt hat. Für den Kandidaten wäre es in diesem Fall sinnvoller zu Tor 2 zu wechseln.

Es ist leicht ersichtlich: Der Kandidat gewinnt, wenn er das Tor wechselt, in zwei von drei Fällen und in einem von drei Fällen verliert er. Beim verallgemeinerten Ziegenproblem wird es noch nachvollziehbarer, intuitiv einen Wechsel vorzunehmen. Damit beschäftigt sich unter anderem das folgende Kapitel.

5 Ähnliche Probleme

5.1 Das verallgemeinerte Ziegenproblem

Beim verallgemeinerten Ziegenproblem gibt es n Tore, wobei $n > 3$ und n-1 Ziegen und 1 Auto dahinter versteckt sind. Der Ablauf ist äquivalent zum Ziegenproblem mit drei Toren bis auf den Punkt, dass n-2 Tore vom Moderator geöffnet werden. Folglich gibt es am Anfang n verschlossene Tore. Mit einer $\frac{1}{n}$%igen *Wahrscheinlichkeit* wird der Kandidat gleich am Anfang das richtige Tor zu wählen. Das falsche Tor wird er mit einer deutlich höheren *Wahrscheinlichkeit* wählen als beim Ziegenproblem, und zwar mit einer $\frac{n-1}{n}$%igen *Wahrscheinlichkeit*. Nach der Torwahl des Kandidaten öffent der Moderator n-2 Tore mit Ziegen dahinter und fragt den Kandidaten, ob dieser wechseln wolle. Es bleiben also zwei Tore übrig. Bei diesem Problem ist es meiner Meinung nach intuitiv verständlicher zu wechseln als beim Ziegenproblem. Warum sollte der Moderator beispielsweise genau das 77. Tor geschlossen lassen. Eine andere Variante des verallgemeinerten Ziegenproblemes, bei dem der Moderator die n-2 Tore einzeln öffnet und nach jedem fragt, ob der Kandidat wechseln wolle, ist auch mit Nachweis auf der Website von Robert Koch [11] vorzufinden.

Beim verallgemeinerten Ziegenproblem handelt es sich um ein sehr ähnliches Problem, da es die gleiche Thematik besitzt und sich lediglich in der unterschiedlichen Anzahl an Tore unterscheidet. Das verallgemeinerte Ziegenproblem dient, wie bereits erwähnt, gut zur Verdeutlichung, dass ein Torwechsel sinnvoll ist.

5.2 „Deal or no Deal“ Sat.1

Die Spielshow „Let’s Make a Deal“ wurde in gewisser Weise wieder aufgegriffen, und zwar von Sat.1 mit „Deal or no Deal“ (19-teilige Spielshow mit Guido Cantz, Donnerstags 20.15 Uhr, 2006). Es gibt 26 Koffer, in denen sich unterschiedlich hohe Geldbeträge (zwischen 0,01 Euro und 250.000 Euro) befinden. Der Kandidat darf sich einen Koffer auswählen. Daraufhin muss er nacheinander sechs Koffer auswählen, die er nicht nimmt. Diese werden geöffnet, sodass ersichtlich wird, was sich dahinter befindet. Danach wählt der Kandidat fünf, vier, drei, zwei und schließlich jeweils einen aus. Nach jeder Runde kann der Kandidat den Koffer an die Bank verkaufen, die je nach Lage des Spiels ein Angebot für den Koffer macht. Nach dem Angebot der Bank wird der Kandidat mit den Worten „Deal or no Deal“ gefragt, ob er auf das Angebot der Bank eingehen oder weiterspielen möchte. Auf dem ersten Blick scheint die Spielshow dem verallgemeinerten Ziegenproblem zu ähneln, da es sich um n Koffer handelt, die nacheinander geöffnet werden. Der Unterschied ist allerdings, dass dem Kandidaten nicht angeboten wird, einen anderen Koffer zu wählen. Ferner wählt nicht der Moderator aus, welcher Koffer als nächster geöffnet wird, sondern der Kandidat. Als Torwechsel könnte man die Möglichkeit betrachten, dass der Kandidat zwischen Geld und dem Risiko, dass in seinem Koffer ganz viel Geld ist, wählen muss. Diese Spielshow kann sicherlich noch detaillierter untersucht werden, aber dies würde den Rahmen dieser Ausarbeitung mit dem Schwerpunkt „Ziegenproblem“ deutlich sprengen.

5.3 Heirats- / Sekretärinnenproblem

Beim Heiratsproblem halten n Prinzen um die Hand der Prinzessin an. Dieses Problem ist äquivalent zum Sekretärinnenproblem, bei dem n Sekretärinnen sich um einen Arbeitsplatz bewerben. Im Folgenden betrachten wir die Problematik am Beispiel der Prinzessin. Die Voraussetzung ist, dass die Prinzessin die Qualitäten der Prinzen einschätzen kann. Der Haken an der Bräutigamwahl ist, dass sie sich nach jedem Prinzen sofort entscheiden muss, ob sie ihn heiratet oder nicht. Ihr Ziel ist es, die *Wahrscheinlichkeit* den besten Prinzen

auszuwählen, zu maximieren.
Die beste Strategie soll die Folgende sein:

1. Betrachte die ersten s Prinzen mit $1 \leq s < n$ und lehne sie ab.

2. Wähle von den verbleibenden n - s Prinzen den ersten aus, der besser als jeder der ersten s Prinzen ist.

Für große n ist der optimale Wert für s, also der Teilmenge derjenigen Prinzen, die sie ablehnen soll, $s \approx n/e$, wobei e die Eulersche Zahl ($e = 2,718281828459...$) darstellt. Die *Wahrscheinlichkeit*, den besten Prinzen zu wählen ist 1/e. Für kleinere Werte von s ist diese *Wahrscheinlichkeit* stets höher. Zur genauen Berechnung gibt es die unten dargelegte Formel. Hierbei ist n die Anzahl der Prinzen, s steht für die ersten s Prinzen mit $1 \leq s < n$. Der beste Prinz kommt an j-ter Stelle.

$$P_n = \frac{1}{n}\sum_{j=s+1}^{n}\frac{s}{j-1} = \frac{s}{n}\sum_{j=s}^{n-1}\frac{1}{j} \text{ [4]}$$

Näheres zum Heiratsproblem kann beispielsweise im Artikel aus dem „Spektrum der Wissenschaft“ [4] nachgelesen werden.
Sowohl beim Ziegenproblem als auch beim Heiratsproblem besteht die Möglichkeit sich für etwas anderes, ein anderes Tor beziehungsweise einen anderen Prinzen, zu entscheiden. Anhand der Formel wird ersichtlich, dass das Heiratsproblem deutlich komplexer ist. Eine weitere Problematik liegt in dem Punkt, dass der beste Prinz leider unbekannt ist.

6 Fazit

Das Ziegenproblem verdeutlicht, wie leicht sich der Verstand täuschen lässt. Man sieht zwei Tore und denkt sofort an eine 50-50-Chance. Dass hierfür das vorherige Ereignis betrachtet werden muss, bleibt außerhalb der Sichtweite. Selbst hoch gebildete Personen mochten den Begründungen von Marilyn vos Savant nicht glauben.
Ich bin der Meinung, dass das Ziegenproblem ein sehr interessantes Problem ist, anhand dessen unter anderem *Entscheidungsbäume* erklärt und angewendet werden können. Ebenso ist es gut geeignet als kurze Programmieraufgabe für Schüler, die ihre Lösung simulieren und dann eventuell widerlegen sollen.
Mich persönlich hat das Ziegenproblem so sehr interessiert, dass ich es von unterschiedlichen Sichtweisen betrachten wollte, da auch für mich anfangs feststand, dass es sich um eine 50-50-Chance handelt. Die unterschiedlichen Herangehensweisen haben mich letztendlich überzeugt und ich hoffe, Sie auch.

7 Glossar

Algorithmus
„eine Verarbeitungsvorschrift, die so präzise formuliert ist, dass sie von einem mechanisch oder elektronisch arbeitenden Gerät durchgeführt werden kann. [...]“ [1]

Alternative
„Bezeichnung für die if ... then ... else – Anweisung, die zwei verschiedene Fortsetzungen erlaubt“ [1]
If „grundlegendes Sprachelement der Programmierung für die Fallunterscheidung und die Verzweigung“ [1]

Bayes‘sches Theorem [5]
Das Bayes‘sche Theorem gibt an, wie mit *bedingten Wahrscheinlichkeiten* gerechnet wird.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)*P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)*P(A_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(B|A_j)*P(A_j)} \text{ [5]}$$

- $p(A_i|B)$: „Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A_i, wenn B bereits eingetreten ist“
- p(B): *totale Wahrscheinlichkeit*

Bedingte Wahrscheinlichkeit
„Bedingte Wahrscheinlichkeit [..] ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass ein Ereignis B bereits vorher eingetreten ist. Es wird geschrieben als p(A | B),...“ [6] und bedeutet es Folgendes: p(Ereignis | Ursache).

Entscheidungsbaum
„Methode zur grafischen Darstellung und Bearbeitung von Entscheidungsproblemen [..]. Ein Entscheidungsbaum zu einem Entscheidungsproblem ist ein geordneter, gerichteter Baum. Jeder Knoten des Baumes mit Ausnahme der Blätter enthält seinerseits ein Entscheidungsproblem, das Teil des Gesamtproblems ist. [...] Die Blätter enthalten die Ergebnisse der jeweiligen Entscheidungsfolgen. [...]“ [1]

Gesetz der großen Zahlen
„Je größer die Stichprobe, desto genauer entspricht die Verteilung der Werte in der Stichprobe der Verteilung in der Gesamtpopulation“ [14]

Iteration
„Bezeichnung für das wiederholte Durchlaufen von Anweisungen oder Anweisungsfolgen oder die wiederholte Anwendung einer Funktion. [...]“ [1]

Konkatenation
„Die Konkatenation zweier Wörter x und y [...] ist das Wort, das sich durch Hintereinanderschreiben der beiden Wörter ergibt“ [1]

Monte-Carlo-Simulation
„Monte-Carlo-Simulation oder Monte-Carlo-Studie, auch: MC-Simulation ist ein Verfahren aus der Stochastik, bei dem sehr häufig durchgeführte Zufallsexperimente die Basis darstellen. Man versucht dann, aufgrund der Ergebnisse mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie analytisch unlösbare Probleme im mathematischem Kontext numerisch zu lösen. Als Rechtfertigung wird dabei vor allem das *Gesetz der großen Zahl* gesehen. Die Zufallsexperimente können entweder real durchgeführt werden, etwa durch Würfeln, oder durch die Erzeugung von Zufallszahlen. Heutzutage können computergenerierte Zufallsvorgänge in beliebig großem Umfang simuliert werden.“ [7]

Simulation
Eine Simulation ist eine Nachbildung beziehungsweise Imitation von Vorgängen und Abläufen durch geeignete Versuche. Mit Hilfe von Computerprogrammen kann ohne übermäßig großen Aufwand eine Vielzahl von Versuchen durchgeführt werden, sodass das *Gesetz der großen Zahl* erfüllt wird.

Totale Wahrscheinlichkeit
Die totale Wahrscheinlichkeit p(B) beschreibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Ereignis B aus einer Menge von Ereignissen A_1 bis A_n folgt.

$$P(B) = \sum_{j=1}^{N} P(B|A_j) * P(A_j) \text{ [5]}$$

Wahrscheinlichkeit
„Die Wahrscheinlichkeit ist eine Einstufung von Aussagen und Urteilen nach dem Grad der Gewissheit (Sicherheit).„ [8]
Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses A ist:

$$\mathrm{p(A)} = \frac{\text{\# günstige Ereignisse}}{\text{\# mögliche Ereignisse}}$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit und A das Ereignis sind. Wahrscheinlichkeiten sind stets größer gleich 0 und kleiner gleich 1. Das Ereignis p(A)=0 ist das unmögliche und p(A)=1 ist das sichere Ereignis. Alle Ereignisse aufsummiert ergeben das sichere Ereignis.

Quellen

[1] Prof. Dr. Volker Claus and Prof. Dr. Andreas Schwill. *Duden Informatik*. Dudenverlag, 2001.

[2] Dave. Das Ziegenproblem - Veranschaulichung anhand einer Spiel-Simulation. http://www.userpages.de/ziegenproblem. Zugriff: 06.08.2006.

[3] Willamette University Mathematics Department. Who's the goat . . . Marilyn or the Mathematicians? http://www.willamette.edu/cla/math/articles/marilyn.htm. Zugriff: 06.08.2006.

[4] Spektrum der Wissenschaft. Strategie der besten Wahl. http://www.wissenschaft-online.de/spektrum/pdf/frei/SdW_04_05_S102.pdf, 2004. Zugriff: 06.08.2006.

[5] Die freie Enzyklopädie Wikipedia. Bayestheorem. http://de.wikipedia.org/wiki/Bayes−Theorem. Zugriff: 06.08.2006.

[6] Die freie Enzyklopädie Wikipedia. Bedingte Wahrscheinlichkeit. http://de.wikipedia.org/wiki/Bedingte_Wahrscheinlichkeit. Zugriff: 06.08.2006.

[7] Die freie Enzyklopädie Wikipedia. Monte-Carlo-Simulation. http://de.wikipedia.org/wiki/Monte−Carlo−Simulation. Zugriff: 06.08.2006.

[8] Die freie Enzyklopädie Wikipedia. Wahrscheinlichkeit. http://de.wikipedia.org/wiki/Wahrscheinlichkeit. Zugriff: 06.08.2006.

[9] Die freie Enzyklopädie Wikipedia. Ziegenproblem. http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem. Zugriff: 06.08.2006.

[10] Olle Häggström. *Steifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, 2006.

[11] Robert Koch. Das verallgemeinerte Ziegenproblem. http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/staff/phpages/koch/ziegen/node4.html. Zugriff: 06.08.2006.

[12] Ian Stewart. *Das Versteck der Andromeda - 17 mathematische Kurzgeschichten aus Spektrum der Wissenschaft*. Spektrum Akademischer Verlag, 1996.

[13] Andreas Vent-Schmidt. Das Ziegenproblem. http://www.procommerz.de/wissen/ziegenproblem. Zugriff: 06.08.2006.

[14] Gero von Randow. *Das Ziegenproblem - Denken in Wahrscheinlichkeiten*. Rowohlt Taschenbuch Verlag, 2005.

[15] The Free Encyclopedia Wikipedia. Monty Hall problem. http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem. Zugriff: 06.08.2006.

[16] Die Zeit. Das Rätsel der drei Türen. *Die Zeit*, 48, 2004.